双曲Coxeter群のgrowth function について (変換群の幾何の展開)

AUTHOR(S):

梅本, 悠莉子

数理解析研究所講究録
第 1816 巻 2012 年 64-70

双曲 Coxeter 群の growth function について

梅本 悠莉子*

大阪市立大学大学院理学研究科

1 群の growth series と growth rate

群の growth series は、その有限生成系を固定したときに以下のように定められる。G を有限生成群とし、S をその有限生成系とする。ここでは、$S=S^{-1}, e\notin S$ と仮定する。以下、まとめて (G,S) と書く。$g\in G$ の S による語の長さを $l_{S}(g):=min\{n\in \mathbb{N}\mid g=s_{1}\cdots s_{n},\ s_{i}\in S\}$ と定める。ただし、$l_{S}(e)=0$ とする。このとき、(G,S) の growth series を

$$f_{S}(t):=\sum_{g\in G}t^{l_{S}(g)}=\sum_{k\geq 0}a_{k}t^{k}=1+|S|t+\cdots$$

で定める。ここで、a_{k} は語の長さが k となる G の元の個数である。さらに、$\tau:=\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_{k}}$ を (G,S) の growth rate と呼ぶ。t を複素数とすれば、Cauchy-Hadamard の定理から、τ は $f(t)$ の収束半径 R の逆数である。

2 Coxeter 群の growth series

まず、Coxeter 系とそのグラフの定義を述べる [KP, Pari]。

定義 2.1. (G,S) が Coxeter 系とは、群 G の関係式が次で与えられていることである；
$G=<s\in S\mid(st)^{m_{s,t}}=e,\ \text{for}\ s,t\in S>$ であり、かつ

1. $m_{s,t}=m_{t,s}$、
2. 任意の $s\in S$ に対し、$m_{s,s}=1$、
3. $s\neq t$ ならば、$m_{s,t}\in\{2,3,\cdots,+\infty\}$。

また、このとき G を Coxeter 群という。

定義 2.2. Coxeter 系 (G,S) の Coxeter グラフとは、頂点が生成元を表し、以下のルールで頂点同士を結んだものである；相異なる $s,t\in S$ に対し、

1. $m_{s,t}\geq 4$ ならば、s,t に対応する頂点を直線で結び $m_{s,t}$ とラベル付けする、
2. $m_{s,t}=3$ ならば、s,t に対応する頂点を直線で結ぶ、
3. $m_{s,t}=2$ ならば、s,t に対応する頂点は結ばない。

以下、Coxeter 群 G に対しては、常に Coxeter 系 (G,S) を考えるものとし、(G,S) を Coxeter 群と呼ぶことにする。

*yuriko.ummt.77@gmail.com

定理 2.3. (Solomon [So]) (G,S) を k 個の頂点を持つ連結な Coxeter グラフで表される有限位数の Coxeter 群 (以下、既約な有限 Coxeter 群と呼ぶ) とし、その growth series を $f_S(t)$ とすると、

$$f_S(t) = \prod_{i=1}^{k}(1+t+t^2+\cdots+t^{m_i})$$

となる。ここで、$\{m_1, m_2, \cdots, m_k\}$ は (G,S) の exponents である。exponents とは、以下で定義される；生成系 $S = \{s_1, ..., s_k\}$ の元の任意の順番の積で定義される Coxeter 元 $c := s_{\sigma(1)} \cdots s_{\sigma(k)}$(ここで σ は S の置換) の位数を h としたとき、Coxeter 元を直交群の元として表したものの固有値は、$(e^{2\pi i/h})^{m_i}$, $i = m_1, ..., m_k$ となり、この $m_1, ..., m_k$ を exponents という。

既約な有限 Coxeter 群の exponents とその growth series は下表のとおりであることが知られている ([Hu, KP])。Symbol に対応する Coxeter グラフについては [Hu, R] を参照して頂きたい。また、$[n] := 1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}$、$[n,m] = [n][m]$ としている。

Symbol	Exponents	$f_S(t)$
A_n	$1, 2, \cdots, n$	$[2, 3, \cdots, n+1]$
B_n	$1, 3, \cdots, 2n-1$	$[2, 4, \cdots, 2n]$
D_n	$1, 3, \cdots, 2n-3, n-1$	$[2, 4, \cdots, 2n-2][n]$
E_6	$1, 4, 5, 7, 8, 11$	$[2, 5, 6, 8, 9, 12]$
E_7	$1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$	$[2, 6, 8, 10, 12, 14, 18]$
E_8	$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$	$[2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30]$
F_4	$1, 5, 7, 11$	$[2, 6, 8, 12]$
H_3	$1, 5, 9$	$[2, 6, 10]$
H_4	$1, 11, 19, 29$	$[2, 12, 20, 30]$
$I_2(m)$	1, m-1	$[2, m]$

図 1: 既約な有限 Coxeter 群の growth series

また、すべての有限 Coxeter 群は既約な有限 Coxeter 群の Coxeter グラフの直和で表される。

定理 2.4. (G,S) を連結でない Coxeter グラフで表される有限 Coxeter 群 (既約でない有限 Coxeter 群)、その growth series を $f_S(t)$、$T_1, ..., T_l \subset S$ をグラフの各連結成分に対応する生成元集合、$f_{T_j}(t)$ を Coxeter 部分群 (G_{T_j}, T_j) の growth series とすると、

$$f_S(t) = \prod_{j=1}^{l} f_{T_j}(t)$$

となる。

さらに、無限 Coxeter 群の growth series は有限 Coxeter 部分群の growth series を用いて表される。

定理 2.5. (Steinberg [St]) (G,S) を無限 Coxeter 群、$T \subset S$ に対し Coxeter 部分群 (G_T, T) の growth series を $f_T(t)$ とすると、

$$\frac{1}{f_S(t^{-1})} = \sum_{T\subset S, |G_T|<\infty} \frac{(-1)^{|T|}}{f_T(t)}$$

となる。

上の定理から、(G,S) が無限 Coxeter 群の場合、その growth series $f_S(t)$ は有理関数 $P(t)/Q(t)$ に解析接続されることがわかる。この有理関数を growth function と呼ぶ。よって、growth rate を調べるには、growth function の極の最小絶対値の逆数を調べればよい。実際、分母 $Q(t)$ は整数係数の多項式であり、$f_S(0)=1$、$P(0)=1$ であることから $Q(0)=1$ であり、growth rate を根に持つ多項式 $t^nQ(t^{-1})$(ここで n は $Q(t)$ の次数) は monic となることから、growth rate は代数的整数であることがわかる。3 章 2 節以降では growth rate の数論的性質をさらに詳しく述べる。

3 Coxeter 多面体から定まる鏡映群とその growth rate

Coxeter 群の中には、Coxeter 多面体と呼ばれる多面体から定まる鏡映群に一致するものがある。この章では、そのような Coxeter 群の growth rate についての先行結果と主定理について述べる。まず、Coxeter 多面体とそれから定まる鏡映群の定義について述べる。

3.1 Coxeter 多面体から定まる鏡映群

定義 3.1. $\mathbb{X}^n$ を n 次元双曲空間 $\mathbb{H}^n$、Euclid 空間 $\mathbb{E}^n$、または球面空間 $\mathbb{S}^n$ とする。$\mathbb{X}^n$ の Coxeter 多面体とは、各面角の大きさが $\pi/m_{s,t}$ (ただし $m_{s,t}$ は 2 以上の整数または ∞) である体積有限の多面体のことである。ここで、s,t は多面体の $n-1$ 次元の 2 つの互いに交わる面を、$\pi/m_{s,t}$ はその間の面角を表すこととする。

また、Coxeter 多面体から定まる鏡映群とは、Coxeter 多面体の $n-1$ 次元の面を含む超平面に関する鏡映変換の集合 S で生成される等長変換部分群 G のことである。

定理 3.2. Coxeter 多面体から定まる鏡映群は Coxeter 群である、つまり定義 3.1 における (G,S) は Coxeter 系である。

実際、定義 3.1 における s,t を $s,t\in S$ と思えば、G の関係式は定義 2.1、(G,S) の Coxeter グラフは定義 2.2 と同様である。

3.2 双曲 Coxeter 群の growth rate

$\mathbb{H}^n$ の Coxeter 多面体から定まる鏡映群は双曲 Coxeter 群と呼ばれ、growth rate の数論的性質についていくつかの先行結果がある。ここではまず、低次元双曲空間における結果を紹介する。

定理 3.3. (Cannon-Wegraich, Parry [CW, Parr]) $\mathbb{H}^2$ または $\mathbb{H}^3$ の compact な Coxeter 多面体から定まる鏡映群の growth rate は Salem 数である。ここで Salem 数とは、代数的整数かつ 1 より大きい実数で、その共役な根で自身以外のものは絶対値が 1 であるものである。

定理 3.4. (Floyd [F]) $\mathbb{H}^2$ の non-compact な Coxeter 多面体から定まる鏡映群の growth rate は Pisot-Vijayaraghavan 数である。ここで Pisot-Vijayaraghavan 数 (P.V. 数) とは、代数的整数かつ 1 より大きい実数で、その共役な根で自身以外のものは絶対値が 1 より小さいもののことである。

これらの他、Kellerhals と Perren は、4 次元の双曲空間の compact な Coxeter 多面体で高々6 つの鏡映変換で生成される鏡映群の growth rate は Salem 数ではなく Perron 数であるという結果を数値計算により得ている [KP]。ここで Perron 数とは、代数的整数かつ 1 より大きい実数で、その共役な根で自身以外のものは絶対値が自身より小さいもののことである。

3.3 主定理

そこで我々は、$\mathbb{H}^3$ の non-compact な場合について以下の結果を得た。growth function の Steinberg の公式を用いた具体的な計算方法や主定理の証明の詳細については、[KU, U] を参照して頂きたい。

定理 3.5. (主定理 (Komori-U)) $\mathbb{H}^3$ の non-compact な Coxeter 四面体または Coxeter 四角錐から定まる鏡映群の growth rate は Perron 数である。

$\mathbb{H}^3$ の non-compact な Coxeter 四面体、non-compact な Coxeter 四角錐のリストはそれぞれ以下である ([Hu, R]、[T])。

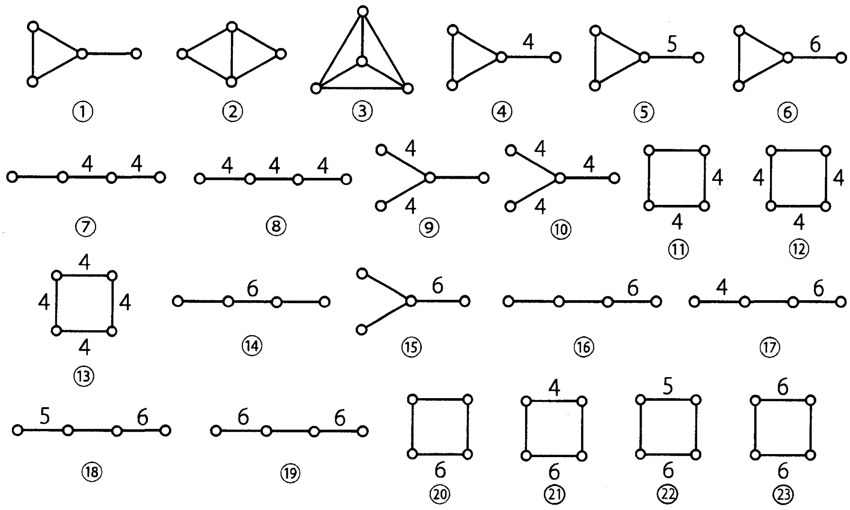

図 2: $\mathbb{H}^3$ の non-compact な四面体

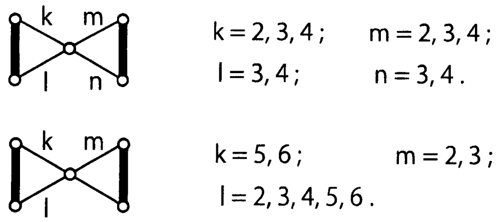

図 3: $\mathbb{H}^3$ の non-compact な四角錐

実際、non-compact な Coxeter 四面体から定まる鏡映群の growth function の分母多項式のリストは以下である。式番号はグラフの番号である。

1. $(t-1)(t^3+t-1)$
2. $(t-1)(t^4+t^3+t^2+t-1)$
3. $(t-1)(3t^2+t-1)$
4. $(t-1)(t^7+t^6+2t^5+2t^4+t^3+t^2-1)$
5. $(t-1)(t^9+t^7+t^6+t^4+t^2+t-1)$
6. $(t-1)(2t^5+t^4+t^2+t-1)$
7. $(t-1)(t^7+t^6+t^5+t^4+t^3-1)$
8. $(t-1)(t^2+t-1)(t^2+t+1)$
9. $(t-1)(t^5+t^3+t-1)$

10. $(t-1)(2t^4+3t^3+t^2-1)$

11. $(t-1)(t^5+t^4+t^2+t-1)$

12. $(t-1)(t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t-1)$

13. $(t-1)(3t^3+t^2+t-1)$

14. $(t-1)(t^5+t^4+t-1)$

15. $(t-1)(t^8+2t^7+2t^6+3t^5+t^4+t^3-1)$

16. $(t-1)(t^7+t^6+t^5+t^4-1)$

17. $(t-1)(t^3+t-1)(t^4+t^3+t^2+t+1)$

18. $(t-1)(t^{13}+t^{12}+2t^{11}+2t^{10}+2t^9+2t^8+2t^7+2t^6+2t^5+t^4+t^3-1)$

19. $(t-1)(t^2+t-1)(t^4+t^3+t^2+t+1)$

20. $(t-1)(t^7+t^6+2t^5+t^4+t^3+t-1)$

21. $(t-1)(t^4+t^3+t^2+t-1)(t^4+t^3+t^2+t+1)$

22. $(t-1)(t^{10}+t^9+t^8+t^7+t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t-1)$

23. $(t-1)(3t^5+t^4+t^3+t^2+t-1)$。

さらに、non-compact な Coxeter 四角錐から定まる鏡映群の growth function の分母多項式のリストは以下である。

- $(k,l,m,n)=(2,3,2,3):\ (t-1)(t^5+2t^4+2t^3+t^2-1)$
- $(2,3,2,4):\ (t-1)(t^7+t^6+2t^5+t^4+2t^3+t-1)$
- $(2,3,3,3):\ (t-1)(t^4+2t^3+t^2+t-1)$
- $(2,3,3,4):\ (t-1)(t^7+2t^6+2t^5+2t^4+2t^3+t^2+t-1)$
- $(2,3,4,4):\ (t-1)(t^5+t^4+t^3+2t-1)$
- $(2,4,2,4):\ (t-1)(t^4+2t^3+t^2+t-1)$
- $(2,4,3,3):\ (t-1)(t^7+2t^6+2t^5+3t^4+2t^3+t^2+t-1)$
- $(2,4,3,4):\ (t-1)(t^8+2t^7+3t^6+3t^5+3t^4+3t^3+t^2+t-1)$
- $(2,4,4,4):\ (t-1)(2t^4+3t^3+2t^2+t-1)$
- $(3,3,3,3):\ (t-1)(t^2+2t-1)$
- $(3,3,3,4):\ (t-1)(t^5+2t^4+t^2+2t-1)$
- $(3,3,4,4):\ (t-1)(t^5+2t^4+t^3+t^2+2t-1)$
- $(3,4,3,4):\ (t-1)(t^6+t^5+2t^4+t^3+t^2+2t-1)$
- $(3,4,4,4):\ (t-1)(2t^6+t^5+2t^4+2t^3+t^2+2t-1)$

- $(4,4,4,4):\ (t-1)(4t^3+t^2+2t-1)$
- $(k,l,m)=(5,2,2)$:
$(t-1)(t^{13}+t^{12}+2t^{11}+2t^{10}+3t^9+2t^8+3t^7+2t^6+3t^5+t^4+2t^3+t-1)$
- $(5,2,3):\ (t-1)(t^9+t^8+2t^6+t^4+t^3+2t-1)$
- $(5,3,2)$:
$(t-1)(t^{15}+2t^{14}+3t^{13}+5t^{12}+5t^{11}+7t^{10}+6t^9+7t^8+6t^7+6t^6+5t^5+3t^4+3t^3+t-1)$
- $(5,3,3):\ (t-1)(t^9+t^8-t^7+3t^6-t^5+t^4+2t^3-2t^2+3t-1)$
- $(5,4,2)$,
$(t-1)(t^{13}+t^{12}+2t^{11}+2t^{10}+3t^9+2t^8+3t^7+2t^6+3t^5+t^4+3t^3-t^2+2t-1)$
- $(5,4,3):\ (t-1)(t^9+t^8+2t^6+3t^3-2t^2+3t-1)$
- $(5,5,2)$:
$(t-1)(t^{11}+t^{10}+t^9+2t^8+t^7+2t^6+t^5+2t^4+t^3+2t-1)$
- $(5,5,3):\ (t-1)(t^7+t^6-t^5+2t^4-t^2+3t-1)$
- $(5,6,2)$:
$(t-1)(t^{14}+2t^{13}+3t^{12}+4t^{11}+5t^{10}+5t^9+5t^8+5t^7+5t^6+5t^5+3t^4+3t^3+t^2+t-1)$
- $(5,6,3)$:
$(t-1)(2t^{10}+t^9+2t^8+t^7+2t^6+2t^5+t^4+2t^3+t^2+2t-1)$
- $(6,2,2):\ (t-1)(t^6+2t^5+t^4+t^3+t^2+t-1)$
- $(6,2,3):\ (t-1)(2t^5+t^4+t^3+2t-1)$
- $(6,3,2):\ (t-1)(t^8+2t^7+3t^6+3t^5+3t^4+2t^3+t^2+t-1)$
- $(6,3,3):\ (t-1)(2t^7+t^6+4t^5+t^4+3t^3+2t-1)$
- $(6,4,2):\ (t-1)(t^8+2t^7+3t^6+4t^5+3t^4+3t^3+t^2+t-1)$
- $(6,4,3):\ (t-1)(2t^8+3t^7+5t^6+6t^5+5t^4+4t^3+2t^2+t-1)$
- $(6,6,2):\ (t-1)(2t^6+3t^5+2t^4+2t^3+2t^2+t-1)$
- $(6,6,3):\ (t-1)(4t^5+t^4+2t^3+t^2+2t-1)$ 。

すべての分母多項式が $t-1$ の項を持つことは、Heckman の論文 [He] 内ですでに明らかにされている。さらに、円分多項式の項 $t^m+t^{m-1}+\cdots+t+1$ を持つものもあるが、実際これは収束半径を与える根を持たない。よってこれら以外の項に注目すると、四角錐の $(k,l,m)=(5,3,3),(5,4,2),(5,4,3),(5,5,3)$ の場合を除けば、$\sum_{k=1}^n b_k t^k-1,\ b_k\geq 0$ の形をした多項式である。よって分母多項式に関する次の補題が主定理の key claim である。

補題 3.6. 次数が 2 以上の多項式 $g(t)=\sum_{k=1}^n b_k t^k-1$ に対し、b_k が非負整数であり、$\{k\in\mathbb{N}\mid b_k\neq 0\}$ の最大公約数は 1 とする。このとき、$g(t)$ の零点で絶対値が最小のものはただ一つであり、それは開区間 $(0,1)$ 上にある。

Remark 3.7. $\mathbb{H}^3$ の non-compact な四面体から定まる鏡映群の growth rate のうち、いくつかは Perron 数であるだけでなく P.V. 数でもある。

次の補題は Remark 3.7 の key claim である。

補題 3.8. 次数が 2 以上の多項式 $g(t) = \sum_{k=1}^{n} t^k - 1$ は単位（開）円板上 $\{t \in \mathbb{C} \mid |t| < 1\}$ にただ一つの零点を持ち、単位円周上 $|t| = 1$ には零点を持たない。

最後に双曲 Coxeter 群の growth rate に関する予想を述べておく。

予想 3.9. (Kellerhals-Perren) 双曲 Coxeter 群の growth rate は Perron 数である。

参考文献

[CW] J. W. Cannon and Ph. Wagreich, Growth functions of surface groups, Math. Ann. **293** (1992), no. 2, 239-257.

[F] W. J. Floyd, Growth of planar Coxeter groups, P.V. numbers, and Salem numbers, Math. Ann. **293** (1992), no. 3, 475-483.

[He] G. J. Heckman, The volume of hyperbolic Coxeter polytopes of even dimension, Indag. Math. (N.S.) 6 (1995), no. 2, 189-196.

[Hu] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 29, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[KP] R. Kellerhals and G. Perren, On the growth of cocompact hyperbolic Coxeter groups, European J. Combin. **32** (2011), no. 8, 1299-1316.

[KU] Y. Komori and Y. Umemoto, On the growth of hyperbolic 3-dimensional generalized simplex reflection groups, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **88** (2012), no. 4, 62-65.

[Pari] L. Paris, Growth series of Coxeter groups, Proceedings of the workshop held in Trieste, March 26-April 6, (1990), 302-310.

[Parr] W. Parry, Growth series of Coxeter groups and Salem numbers, J. Algebra **154** (1993), no. 2, 406-415.

[R] J. G. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*, Grad. Texts in Math., 149, Springer, New York, 1994.

[So] L. Solomon, The orders of the finite Chevalley groups, J. Algebra **3**(1966), 376-393.

[St] R. Steinberg, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

[T] P. V. Tumarkin, Hyperbolic Coxeter n-polytopes with n+2 facets, Math. Notes 75 (2004), no. 5-6, 848-854.

[U] Y.Umemoto, The growth rates of non-cocompact 3-dimensional hyperbolic Coxeter tetrahedra and pyramids, to appear in Proceedings of the 19th ICFIDCAA in Hiroshima, Tohoku University Press (2012).